

весенний семестр 2005 года

### ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ, ФФКЭ

1. Что такое унитарный оператор?
2. Что такое эрмитовый оператор?
3.  $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = ?$
4.  $(\hat{f}\hat{g})^+ = ?$
5. Чему равен коммутатор  $[\hat{p}_\alpha, \hat{x}_\beta]$ ?
6. Пусть совокупность векторов  $|n\rangle$  составляет полный базис. Чему равен оператор  $\sum_n |n\rangle\langle n|$ ?
7. Пусть  $\hat{f}|f_n\rangle = f_n|f_n\rangle$ , чему равен матричный элемент  $\langle f_n|\hat{f}|\psi\rangle$ ?
8. Что называется стационарным уравнением Шредингера?
9. Каким уравнением определяется эволюция во времени волновой функции  $\Psi(q, t)$ , описывающей состояние квантовой системы ( $q$  – набор обобщенных координат)?
10. Напишите общее выражение для гамильтониана частицы, движущейся в потенциальном поле.
11. Как выглядит гамильтониан линейного гармонического осциллятора в координатном представлении?
12. Как выглядит энергетический спектр линейного гармонического осциллятора?
13. Как выглядит гамильтониан водородоподобного атома в координатном представлении?
14. Какой смысл имеет величина  $|\Psi(t, \mathbf{r})|^2$ ? Зависит ли от времени интеграл  $\int |\Psi(t, \mathbf{r})|^2 dV$ ?
15. Как выглядят граничные условия для нахождения волновых функций связанных состояний частицы?
16. Как выглядит оператор  $\hat{l}_z$  в координатном представлении (в декартовых и полярных координатах)?
17. Как выглядят собственные функции оператора  $\hat{l}_z$ ?
18. Чему равен коммутатор  $[\hat{l}_z, U(|\mathbf{r}|)]$ ?
19. Гамильтониан  $\hat{H}$  замкнутой системы не зависит от времени  $t$ . Что получится, если оператором  $\exp\left(-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}\right)$  подействовать на некоторый фиксированный вектор состояния  $|\Psi_0\rangle$ ?
20. Что называется уравнением непрерывности для плотности вероятности в квантовой механике?
21. Что называется плотностью потока вероятности в квантовой механике?
22. Что называется одномерной задачей рассеяния? Как выглядят граничные условия в этой задаче?
23. Пусть спектры операторов  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$  невырождены; при этом  $[\hat{f}, \hat{g}] = 0$  и  $\hat{f}|f_n\rangle = f_n|f_n\rangle$ . Чему равно  $\hat{g}|f_n\rangle$ ?
24. Выразите одномерный оператор сдвига  $\hat{T}_a$  через оператор импульса  $\hat{p}$ .
25. Пусть  $\hat{I}$  – оператор инверсии и  $[\hat{H}, \hat{I}] = 0$ , где  $\hat{H}$  – гамильтониан задачи об одномерном движении частицы. В каком виде можно искать собственные функции гамильтониана?
26. Пусть  $\hat{T}_a$  – оператор сдвига и  $[\hat{H}, \hat{T}_a] = 0$ , где  $\hat{H}$  – гамильтониан задачи об одномерном движении частицы. В каком виде можно искать собственные функции гамильтониана?
27. Пусть  $\hat{A}$  – оператор физической величины, не зависящий от времени, а  $\hat{H}$  – гамильтониан системы. Что называется оператором  $\hat{A}_T(t)$  той же физической величины в представлении Гайзенберга?
28. Что называется оператором изменения физической величины во времени? Чему равен этот оператор?

29. Гамильтониан частицы, совершающей одномерное движение в потенциальном поле, есть  $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + U(x)$ . Чему равен оператор  $d\hat{p}/dt$ ?
30. Гамильтониан частицы, совершающей одномерное движение в потенциальном поле, есть  $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + U(x)$ . Чему равен оператор  $d\hat{x}/dt$ ?
31. К какому виду могут быть приведены матричные элементы  $\langle \mathbf{r}' | \hat{\mathbf{r}} | \mathbf{r} \rangle$  и  $\langle \mathbf{p}' | \hat{\mathbf{p}} | \mathbf{p} \rangle$ ?
32. Что представляют собой величины  $\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle$  и  $\langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle$ ?
33. Как связаны между собой величины  $\langle \mathbf{r} | \Psi \rangle$  и  $\langle \mathbf{p} | \Psi \rangle$ ?
34. Как выглядит оператор координаты  $\hat{\mathbf{r}}$  в импульсном представлении?
35. К какому виду могут быть приведены величины  $\langle \mathbf{r} | \hat{\mathbf{p}} \Psi \rangle$  и  $\langle \mathbf{p} | \hat{\mathbf{r}} \Psi \rangle$ ?
36. Известен коммутатор двух эрмитовых операторов:  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ . Что можно сказать о величинах  $\langle (\Delta A)^2 \rangle$  и  $\langle (\Delta B)^2 \rangle$  в произвольном состоянии  $|\psi\rangle$  квантовой системы?
37. Что называется оператором орбитального момента  $\hat{\mathbf{L}}$  частицы? Чему равны коммутаторы  $[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta]$  и  $[\hat{l}_\alpha, \hat{\mathbf{L}}^2]$ ?
38. Что называется оператором орбитального момента  $\hat{\mathbf{L}}$  частицы? Как определяются операторы  $\hat{l}_\pm$ ? Чему равны коммутаторы  $[\hat{l}_z, \hat{l}_\pm]$ ?
39. Что называется оператором орбитального момента  $\hat{\mathbf{L}}$  частицы? Как определяются операторы  $\hat{l}_\pm$ ? Выразите оператор  $\hat{\mathbf{L}}^2$  через операторы  $\hat{l}_z$  и  $\hat{l}_\pm$ .
40. Что называется оператором углового момента  $\hat{\mathbf{J}}$  системы?  $\hat{\mathbf{J}}^2 |j, m\rangle = ?$   $\hat{j}_z |j, m\rangle = ?$
41. Что называется оператором углового момента  $\hat{\mathbf{J}}$  системы? Как определяются операторы  $\hat{j}_\pm$ ? Чему равно  $\hat{j}_\pm |j, m\rangle$ ?
42. Что называется оператором углового момента  $\hat{\mathbf{J}}$  системы? Как определяются операторы  $\hat{j}_\pm$ ? Чему равны матричные элементы  $\langle j, m | \hat{j}_- \hat{j}_+ | j, m \rangle$  и  $\langle j, m | \hat{j}_+ \hat{j}_- | j, m \rangle$ ?
43. Как выражаются операторы  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^+$  в теории линейного гармонического осциллятора через операторы координаты  $\hat{x}$  и импульса  $\hat{p}$ ?
44. Выразите для линейного гармонического осциллятора операторы координаты  $\hat{x}$  и импульса  $\hat{p}$  через операторы  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^+$ .
45. Почему операторы  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^+$  в теории линейного гармонического осциллятора называются операторами уничтожения и рождения? Чему равен коммутатор  $[\hat{a}, \hat{a}^+]$ ?
46. Как гамильтониан линейного гармонического осциллятора выражается через операторы  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^+$ ?
47. Для линейного гармонического осциллятора выразите произвольное возбужденное состояние  $|n\rangle$  через основное  $|0\rangle$ .
48. Чему равны матричные элементы  $\langle n | \hat{a}^+ \hat{a} | n \rangle$  и  $\langle n | \hat{a} \hat{a}^+ | n \rangle$  в теории линейного гармонического осциллятора?
49. Как выглядят матрицы Паули  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ ? В чем смысл этих матриц?
50. Выпишите явный вид оператора  $\vec{\sigma} \vec{n}$ , где  $\vec{n}$  – единичный вектор, а  $\sigma_\alpha$  – матрицы Паули. В чем смысл этого оператора?
51. Что называется осцилляторными единицами энергии, импульса и длины?
52. Для линейного гармонического осциллятора выпишите уравнение, которое определяет волновую функцию основного состояния.
53. Как выглядит волновая функция основного состояния линейного гармонического осциллятора в координатном представлении  $\psi_0(x)$ ?

54. Как ведет себя в асимптотике  $x \rightarrow \infty$  волновая функция стационарного состояния линейного гармонического осциллятора?
55. Что называется сферическими гармониками  $Y_{lm}(\theta, \phi)$ ? Каким дифференциальным уравнениям удовлетворяют эти функции?
56. Как выглядит в импульсном представлении стационарное уравнение Шредингера, описывающее одномерное движение частицы?
57. Выпишите полный набор коммутирующих операторов (физических величин) для бесспиновой частицы в центральном поле.
58. В каком виде всегда можно представить волновую функцию  $\psi(\mathbf{r})$  частицы в центральном поле  $U(|\mathbf{r}|)$ ? Почему?
59. Что называется атомными единицами энергии и длины?
60. Выпишите полный набор коммутирующих операторов (физических величин) для задачи об атоме водорода. Какие значения могут принимать квантовые числа, характеризующие стационарные состояния атома водорода?
61. Как выглядит энергетический спектр атома водорода? Чему равна кратность вырождения состояния с главным квантовым числом  $n$ ? По каким квантовым числам происходит вырождение? Что можно сказать о причинах вырождения?
62. Как зависит от азимутального угла  $\varphi$  волновая функция атома водорода  $\psi_{nlm}(\mathbf{r})$ ?
63. Сколько нулей имеет радиальная функция атома водорода  $R_{nl}(r)$ ?
64. Как ведет себя в асимптотике  $r \rightarrow \infty$  радиальная волновая функция атома водорода  $R_{nl}(r)$ ?
65. Как ведет себя в асимптотике  $r \rightarrow 0$  радиальная волновая функция атома водорода  $R_{nl}(r)$ ?
66. Состояние частицы описывается волновой функцией  $\psi(x)$ , нормированной на единицу. Как найти среднее значение импульса частицы в этом состоянии?
67. Состояние частицы описывается волновой функцией  $\psi(x)$ , нормированной на единицу. Как найти среднее значение кинетической энергии частицы в этом состоянии?
68. Состояние линейного гармонического осциллятора с собственной частотой  $\omega$  в начальный момент  $t = 0$  описывается волновой функцией  $\Psi(x, 0)$ . Что можно сказать о волновой функции осциллятора  $\Psi(x, t)$  в момент  $t = 2\pi/\omega$ ?
69. Состояние линейного гармонического осциллятора со спектром  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$  описывается волновой функцией  $\psi(x)$ , нормированной на единицу. Какова вероятность того, что при измерении энергии осциллятора будет получено значение  $E_n$ ?
70. Состояние частицы описывается волновой функцией  $\psi(x)$ , нормированной на единицу. Какова вероятность того, что при измерении импульса  $p$  этой частицы будут получены значения, лежащие в интервале от  $p_1$  до  $p_2$ ?
71. Состояние частицы описывается волновой функцией  $\psi(x)$ , нормированной на единицу. Какова вероятность того, что при измерении кинетической энергии  $K$  этой частицы будут получены значения, лежащие в интервале от  $K_1$  до  $K_2$ ?
72. Связанное состояние бесспиновой частицы в трехмерной потенциальной яме описывается волновой функцией  $\psi(\mathbf{r})$ , нормированной на единицу. Как найти среднее значение проекции углового момента частицы на ось  $x$ ?
73. Спиновое состояние частицы со спином  $1/2$  описывается нормированным на единицу спинором  $\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . Чему равно среднее значение проекции спина на ось  $x$  в этом состоянии?